Kugelgleichungen

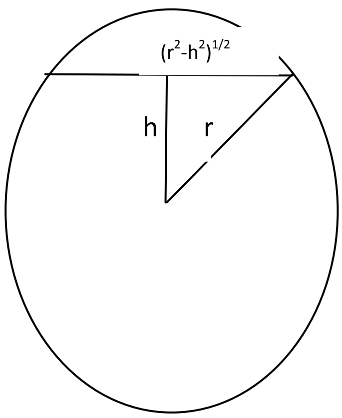
Bezeichnungen: Kugelkappe KK

Kugel – Kugelkappe KmK

**Mantelfläche von KK oder KmK** ist der entsprechende Teil der Kugeloberfläche ohne die begrenzende Kreisfläche

**Oberfläche von KK oder KmK** ist der entsprechende Teil der Kugeloberfläche zusammen mit der begrenzenden Kreisfläche

**Teiloberfläche von KK oder KmK** ist der entsprechende Teil der Kugeloberfläche zusammen mit derHälfte der begrenzenden Kreisfläche (den Grund hierfür sieht man später)




**Allgemeine Volumen- und Flächenformeln**

Kugelvolumen: $V = (4/3)\pi r^3$

Kugeloberfläche: $F = 4\pi r^2$

Volumen von KK $V = (2/3)\pi r^3 - \pi hr^2 + (1/3)\pi h^3$

Mantelfläche von KK $F = 2\pi r^2 - 2\pi rh$

Oberfläche von KK $O = 3\pi r^2 - 2\pi rh - \pi h^2$

Teiloberfläche von KK $T = (5/2)\pi r^2 - 2\pi rh - (1/2)\pi h^2$

Volumen von KmK $V = (2/3)\pi r^3 + \pi h r^2 – (1/3)\pi h^3$

Mantelfläche von KmK $F = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Oberfläche von KmK $O = 3\pi r^2 + 2\pi r h - \pi h^2$

Teiloberfläche von KmK $T = (5/2)\pi r^2 + 2\pi r h - (1/2)\pi h^2$

Falls man h als Vielfaches von r schreibt also

$h = ar$ wobei a zwischen 0 und 1 liegt,

dann kommt man zu folgenden Formeln für K

Volumen von KK $V = (2/3)\pi r^3 – \pi a r^3 + (1/3)\pi a^3 r^3 =$

$(1/3)\pi r^3 * (2 - 3a + a^3)$

Mantelfläche von KK $F = 2\pi r^2 - 2\pi a r^2 = 2\pi r^2 * (1 – a)$

Oberfläche von KK $O = 3\pi r^2 - 2\pi a r^2 - \pi a^2 r^2 = \pi r^2 * (3 – 2a – a^2)$

Teiloberfläche von KK $T = (5/2)\pi r^2 - 2\pi a r^2 - (1/2)\pi a^2 r^2 = (1/2)\pi r^2 * (5 – 4a – a^2)$

Und entsprechend für KmK

Volumen von KmK $V = (2/3)\pi r^3 + \pi a r^3 – (1/3)\pi a^3 r^3 =$

$(1/3)\pi r^3 * (2 + 3a – a^3)$

Mantelfläche von KmK $F = 2\pi r^2 + 2\pi a r^2 = 2\pi r^2 * (1 + a)$

Oberfläche von KmK $O = 3\pi r^2 + 2\pi a r^2 - \pi a^2 r^2 = \pi r^2 * (3 + 2a – a^2) = \pi r^2 * (1 + a) * (3 – a)$

Teiloberfläche von K $T = (5/2)\pi r^2 + 2\pi a r^2 - (1/2)\pi a^2 r^2 = (1/2)\pi r^2 * (5 + 4a – a^2)$

$= (1/2)\pi r^2 * (1 + a) * (5 – a)$

Wir vergleichen nun die verschiedenen Flächen einer Kugel und einer Kugel – Kappe (KmK) mit gleichen Volumen.

Also sei $V_K = (4/3)\pi r^3$ und $V_{KmK} = (1/3)\pi r_a^3 * (2 + 3a - a^3)$ , mit a eine Zahl zwischen 0 nd 1.

Wegen Gleichheit des Volumens gilt dann:

$$(4/3)\pi r^3 = (1/3)\pi r_a^3 * (2 + 3a - a^3)$$

Nach $r_a$ aufgelöst ergibt sich

$$r_a = r * (4/(2 + 3a - a^3))^{1/3}$$

wegen $(2 + 3a - a^3) = (a + 1)^2 * (2-a)$ kann man auch schreiben

$$r_a = r * (4/((a + 1)^2 * (2-a)))^{1/3}$$

***1. Fall: Vergleich der Mantelflächen***

Die Mantelfläche der Kugel ist $F_K = 4\pi r^2$ und von KmK $F_{KmK} = 2\pi r_a^2 * (1 + a)$

Ersetzen von $r_a$ durch die obige Formel

$$F_{KmK} = 2\pi r^2 * (4/(a + 1)^2 * (2-a))^{2/3} * (1+a) \text{ ergibt}$$

Und indem man (1+a) unter die Wurzel zieht, ergibt sich

$$F_{KmK} = 2\pi r^2 * ((4^2 * (1+a)^3)/((a + 1)^4 * (2 - a)^2))^{1/3}$$

$$= 4\pi r^2 * (2/((a + 1) * (2 - a)^2))^{1/3}$$

Für a = 0 (KmK ist dann eine Halbkugel) ergibt sich

$$F_{KmK} = 4\pi r^2 * (1/2)^{1/3} \quad \text{also kleiner als } 4\pi r^2$$

Und für a = 1 (KmK ist dann die Kugel) ist natürlich

$$F_{KmK} = 4\pi r^2$$

Für alle Werte dazwischen, also $0 \leq a \leq 1$ , gilt

$$4\pi r^2 * (1/2)^{1/3} \leq F_{KmK} \leq 4\pi r^2$$

Das kann man folgendermaßen zeigen:

Sei $0 \leq a < b \leq 1$

Wir betrachten mal den Nenner der dritten Wurzel $(a + 1) * (2 - a)^2$

Falls man die Klammern auflöst, kann man dafür auch schreiben $(4 - 3a^2 + a^3)$

Dann gilt $(4 - 3a^2 + a^3) - (4 - 3b^2 + b^3) = (3b^2 - 3a^2) - (b^3 - a^3) =$

$3(b-a) * (b+a) - (b - a) * (b^2 + ab + a^2) = (b - a) * (3(b + a) - (b^2 + ab + a^2))$

Wegen $0 \leq a < b \leq 1$ gelten folgende Ungleichungen

$(b - a) > 0$

$(b + a) \geq b \geq b^2$

$(b + a) > a \geq ab$

$(b + a) > a \geq a^2$

Dann gilt auf jeden Fall $3(b + a) - (b^2 + ab + a^2) > 0$ also auch

$(b - a)*(3(b + a) - (b^2 + ab + a^2)) > 0$

Damit gilt dann

$(4 - 3a^2 + a^3) - (4 - 3b^2 + b^3) > 0$

Also mit wachsendem a wird der Nenner kleiner(d.h. der Nenner ist monoton fallend)

Dann ist der Ausdruck unter der Wurzel

$2/((a + 1)*(2 - a)^2)$ monoton steigend und damit auch

$(2/((a + 1)*(2 - a)^2))^{1/3}$ monoton steigend und damit $F_{KmK}$ auch monoton steigend.

Damit ist die Mantelfläche für a = 0 (KmK ist eine Halbkugel) am kleinsten und für a = 1 (Kmk ist eine Vollkugel) am größten.

***2 Fall: Vergleich der Oberflächen***

Die Oberfläche der Kugel ist wieder $O_K = 4\pi r^2$ und von KmK $O_{KmK} = \pi r_a^2*(1 + a)*(3 - a)$

Ersetzen wir $r_a$ wieder durch die Formel von weiter oben, ergibt sich

$O_{KmK} = \pi r^2*(4/(a + 1)^2*(2-a))^{2/3}*(1+a)*(3-a)$

Und indem man (1+a)*(3-a)unter die Wurzel zieht, ergibt sich

$O_{KmK} = \pi r^2*((4^2*(1+a)^3*(3 - a)^3)/((a + 1)^4*(2 - a)^2))^{1/3}$

$= 2\pi r^2*((2*(3 - a)^3)/((a + 1)*(2 - a)^2))^{1/3}$

Für a = 0 (KmK ist dann eine Halbkugel) ergibt sich

$O_{KmK} = 6\pi r^2*(1/2)^{1/3}$ also größer als $4\pi r^2$, wie man leicht nachrechnet

Und für a = 1 (KmK ist dann die Kugel) ist natürlich

$O_{KmK} = 4\pi r^2$

Dieses Ergebnis ist deshalb nicht verwunderlich, weil ja die Kugel unter allen Körpern mit gleichem Volumen die kleinste Oberfläche hat.

Es gilt sogar, dass $O_{KmK}$ mit steigendem a ($0 \le a \le 1$) monoton fällt. Dies läßt sich aber nicht so einfach zeigen, wie im Fall 1. Hier benötigen wir die Hilfe der Differentialrechnung.

Wenn man eine Funktion f(x) differenziert (man sagt auch, man bildet von f(x) die erste Ableitung), dann erhält man eine Funktion f'(x), für die folgendes gilt:

Für jedes x ist f'(x) die Steigung der Tangente an der Funktionskurve im Punkte x.

Man sieht nun leicht (ohne auf genaue mathematische Beweise zu schauen), dass eine Funktion f(x) dann monoton fällt, wenn $f'(x) \le 0$ ist für alle x, d.h. wenn an jedem Punkt x die Steigung der Tangente an f(x) negativ oder Null ist.

Wir wenden diesen Sachverhalt jetzt auf unsere Oberflächenfunktion $O_{KmK}$ an. Um zu zeigen, dass $O_{KmK}$ für a zwischen 0 und 1 (an Stelle von x haben wir hier die Variable a) monoton fällt, reicht es zu zeigen, dass die Funktion

$$f(a) = (2*(3 - a)^3)/((a + 1)*(2 - a)^{2)}$$

monoton fallend ist, da die dritte Wurzel und die Konstante $2\pi r^2$ vor der Wurzel nichts an der Monotonie ändert

Ich gebe hier die Ableitung f'(a) nur an. Wenn du später an der Schule mal Differentialrechnung gehabt hast, dann kannst du das leicht nachrechnen. (ich benutze hier mal die Schreibweise ohne Bruchstrich, dafür mit negativen Potenzen)

$$f'(a) = 12*(3 - a)^2*(a + 1)^{-2}*(2 - a)^{-3}*(a - 1)$$

Für a zwischen 0 und 1 ist (a – 1) negativ, alle anderen Faktoren sind immer positiv.

Damit ist f'(a) immer negativ und somit $O_{KmK}$ monoton fallend.

***3 Fall: Vergleich der Teiloberflächen***

Diese Fläche kommt deinem Raketenthema am nächsten, denn wenn man zwei sich in einer Kreisfläche berührende Kugeln hat, dann ist die Summe der Teilflächen der beiden Kugeln gleich der Summe der beiden Mantelflächen plus der Kreisfläche, in der sich die Kugeln berühren.

Die Teiloberfläche der Kugel ist wieder $T_K = 4\pi r^2$ und von KmK $T_{KmK} = (1/2)\pi r_a^2*(1 + a)*(5 - a)$

Ersetzen wir $r_a$ wieder durch die Formel von weiter oben, ergibt sich

$$T_{KmK} = (1/2)\pi r^2*(4/(a + 1)^2*(2-a))^{2/3}*(1+a)*(5-a)$$

Und indem man (1+a)*(5-a)unter die Wurzel zieht, ergibt sich

$$T_{KmK} = (1/2)\pi r^2*((4^2*(1+a)^3*(5 - a)^3)/((a + 1)^4*(2 - a)^2))^{1/3}$$

$$= \pi r^2*((2*(5 - a)^3)/((a + 1)*(2 - a)^2))^{1/3}$$

Für a = 0 (KmK ist dann eine Halbkugel) ergibt sich

$T_{KmK} = 5\pi r^2 * (1/2)^{1/3} = 3{,}9865\pi r^2$ also etwas kleiner als $4\pi r^2$.

Und für a = 1 (KmK ist dann die Kugel) ist natürlich

$T_{KmK} = 4\pi r^2$

Auch hier betrachten wir die Funktion unter der dritten Wurzel

$f(a) = (2*(5 - a)^3)/((a + 1)*(2 - a)^{2)}$ ,

da die dritte Wurzel und die Konstante $\pi r^2$ vor der Wurzel nichts am Verhalten der Teiloberfläche ändern.

Auch hier gebe ich nur die Ableitung f'(a) an. Auch hier benutze ich mal die Schreibweise ohne Bruchstrich, dafür mit negativen Potenzen.

$f'(a) = 12*(5 - a)^2*(a + 1)^{-2}*(2 - a)^{-3}*(2a - 1)$

Auch hier müssen wir nur den letzten Faktor (2a – 1) betrachten, alle anderen Faktoren sind immer positiv.

Für a zwischen 0 und ½ ist (2a – 1) negativ, für a = ½ ist (2a – 1) = 0 und für a zwischen ½ und 1 ist (2a – 1) positiv

f'(a) ist also negativ für a zwischen 0 und ½ , für a = 0 ist f'(a) = 0 und für a zwischen ½ und 1 ist f'(a) positiv. Somit ist $T_{KmK}$ monoton fallend für a zwischen 0 und ½ , hat sein Minimum für a = ½ und steigt dann wieder für a zwischen ½ und 1 bis zum Wert $4\pi r^2$.

½ eingesetzt in die Formel ergibt dann das Minimum $T_{KmK} = 3\pi r^2 * 2^{1/3} = 3{,}7798\ \pi r^2$

***4. Fall: 2 KmK's, die sich in der Kreisfläche berühren***

Man hat hier dein erstes Szenario von zwei Kugeltanks, die sich in einer Kreisfläche berühren

Kugel 1 (die kleine Kugel) hat das Volumen $V_1 = (4/3)\pi r^3$

Kugel 2 (die große Kugel) hat als Volumen $V_2 = (4/3)\pi R^3$

Das Volumenverhältnis $V_2/V_1$ nennen wir g.

Wie man leicht sieht, gilt dann $R^3/r^3 = g$ oder $R = g^{1/3}*r$

Beide Kugeln gehen dann über in zwei KmK's mit gleichem Volumen, wobei die beiden KmK's eine gleichgroße Kreisfläche als Berührungsfläche haben.

Die Fläche, die zu betrachten ist, ist die Summe der beiden Mantelflächen plus der berührenden Kreisfläche also genau die Summe der beiden Teilflächen laut Fall 3.

$F = T_{1,KmK} + T_{2,KmK}$

Mit $T_{1,KmK} = (1/2)\pi r_a^2*(1 + a)*(5 - a) = \pi r^2*((2*(5 - a)^3)/((a + 1)*(2 - a)^2))^{1/3}$ mit $0 \leq a \leq 1$

Und $T_{2,KmK} = (1/2)\pi R_b^2 * (1 + b) * (5 - b) = \pi R^2 * ((2 * (5 - b)^3)/((b + 1) * (2 - b)^2))^{1/3}$ mit $0 \leq b \leq 1$,

und wegen $R = g^{1/3} * r$ gilt weiter

$$T_{2,KmK} = \pi r^2 * ((2g^2 * (5 - b)^3)/((b + 1) * (2 - b)^2))^{1/3}$$

Die Abhängigkeit zwischen a und b ergibt sich durch die Gleichheit der berührenden Kreisfläche.

Nach Pythagoras gilt

$$r_a^2 * (1 - a^2) = R_b^2 * (1 - b^2)$$

Wenn man die Formel von Seite 3

$$r_a = r * (4/((a + 1)^2 * (2-a)))^{1/3}$$

bzw. $R_b = R * (4/((b + 1)^2 * (2-b)))^{1/3} = r * (4g/((b + 1)^2 * (2-b)))^{1/3}$

Eingesetzt in die Pythagoras-Formel ergbt sich

$$r^2 * (4^2/((a + 1)^4 * (2 - a)^2))^{1/3} * (1 - a^2) = r^2 * (4^2 g^2/((b + 1)^4 * (2 - b)^2))^{1/3} * (1 - b^2)$$

Durch Anwendung der 3. Binomischen Formel, Zusammenfassung aller Faktoren unter der 3. Wurzel und Kürzung gleicher Faktoren ergibt sich dann

$$((1 - a)^3/((a + 1) * (2 - a)^2))^{1/3} = (g^2 * (1 - b)^3/((b + 1) * (2 - b)^2))^{1/3}$$

Die dritte Wurzel kann man auch weglassen und man erhält dann

$$(1 - a)^3/((a + 1) * (2 - a)^2) = g^2 * (1 - b)^3/((b + 1) * (2 - b)^2)$$

Wir machen jetzt folgende Substitution:

$$s = (1 - a) \quad \text{und} \quad t = (1 - b)$$

Dies setzen wir in die obige Formel ein, und es ergibt sich dann

$$s^3/((s + 1)^2 * (2 - s)) = g^2 * t^3/((t + 1)^2 * (2 - t))$$

Umgerechnet ergibt sich dann

$$s^3 * (2 + 3t - t^3) = g^2 * t^3 * (2 + 3s - s^3)$$

oder aufgelöst zu einer Gleichung dritten Grades

$$s^3 - (3g^2t^3/(2 + 3t + t^3 * (g^2 - 1))) * s - ((2g^2t^3/(2 + 3t + t^3 * (g^2 - 1))) = 0$$

und falls wir als Hilfsfunktion die folgende Funktion einführen

$$h(t) = g^2t^3/(2 + 3t + t^3 * (g^2 - 1))$$

dann lässt sich die Gleichung einfacher schreiben

$$s^3 - 3h(t) * s - 2h(t) = 0$$

wenn man jetzt unter Wikipedia die Lösung von Gleichungen dritten Grades anguckst,

dann siehst man, dass hier genau die Cardanische Formel $z^3 + pz + q = 0$ steht mit

$s = z$, $p = -3h(t)$, $q = -2h(t)$

Die Lösung für s lautet dann

$$s = (h(t) + (h^2(t) – h^3(t))^{1/2})^{1/3} + (h(t) - (h^2(t) – h^3(t))^{1/2})^{1/3}$$

Da a und b zwischen 0 und 1 liegen, liegen auch s und t zwischen 0 und 1.

Man kann nun zeigen, dass $h(t) < 1$ ist für t zwischen 0 und 1

$h(t) = g^2t^3/(2 + 3t + t^3*(g^2 -1)) = g^2t^3/(2 + 3t – t^3+ g^2t^3)$ (wegen $t – t^3 > 0$ gilt weiter)

$< g^2t^3/(2 + 2t + g^2t^3) < 1$ da der Zähler immer kleiner als der Nenner ist.

Damit ist dann $h^2(t) – h^3(t) = h^2(t)*(1 – h(t)) > 0$ und damit die Quadratwurzel aus

$h^2(t) – h^3(t)$ eine reelle Zahl und damit auch s eine reelle Zahl für t zwischen 0 und 1

Jetzt hat man alles zusammen, um für die Fläche mit deiner Excel-Lösung das Minimum auszurechnen. Wir ersetzen zunächst in der Flächenformel a,b durch s,t.

$$F = T_{1,KmK} + T_{2,KmK} = \pi r^2*((2*(5 – a)^3)/((a + 1)*(2 – a)^2))^{1/3} + \pi r^2*((2g^2*(5 – b)^3)/((b + 1)*(2 – b)^2))^{1/3}$$

$$= \pi r^2*(((2*(5 – a)^3)/((a + 1)*(2 – a)^2))^{1/3} + ((2g^2*(5 – b)^3)/((b + 1)*(2 – b)^2))^{1/3})$$

$$= \pi r^2*(((2*(4 + s)^3)/((2 - s)*(1 + s)^2))^{1/3} + ((2g^2*(4 + t)^3)/((2 - t)*(1 + t)^2))^{1/3})$$

Du wählst ein t, berechnest h(t) und dann s und und dann F.

Eigentlich berechnest du ja das Oberflächengewicht und hast deshalb an Stelle von F eine etwas andere Formel. Das ist aber kein Problem, da die Abhängigkeit zwischen s und t immer gleich bleibt.

***5. Fall: 2 Kugeln, bei der die kleinere in die größere (maximal bis zum Äquator) Kugel eintaucht***

Man hat hier dein zweites Szenario von zwei Kugeltanks.

Kugel 1 (die kleine Kugel) hat das Volumen $V_1 = (4/3)\pi r^3$

Kugel 2 (die große Kugel) hat als Volumen $V_2 = (4/3)\pi R^3$

Das Volumenverhältnis $V_2/V_1$ nennen wir wieder g.

Es gilt wieder $R = g^{1/3}*r$

In diesem Fall bleibt die Form der kleineren Kugel unverändert und taucht in die größere Kugel ein, die sich in eine KmK umwandelt mit eingetauchter Kugelkappe wobei das Volumen dieses Gebildes unverändert bleibt. Dabei ist natürlich die begrenzende Kreisfläche der KmK identisch mit der begrenzenden Kreisfläche der Kugelkappe (von der kleineren Kugel) Sie haben also den gleichen Radius

Wie in den vorherigen Fällen bezeichnen wir auch hier wieder als Höhe h den Abstand vom Mittelpunkt der Kugel zur Kreisfläche der Kugelkappe (KK) bzw. zur Kugel – Kappe (KmK) und rechnen mit ihr als Vielfaches vom Radius.

Für die kleinere Kugel ist das dann ar ( a zwischen 0 und 1 , wobei r unverändert bleibt )
Für die größere Kugel (die KmK) ist es $bR_b$

Die Fläche, die zu betrachten ist, ist die Summe aus der Oberfläche der kleineren Kugel ($4\pi r^2$) und der Mantelfläche der KmK (mit dem größeren Volumen).

$$F_{Ges} = 4\pi r^2 + F_{2,KmK} = 4\pi r^2 + 2\pi R_b^2 * (1 + b)$$

Es ist jetzt die Abhängigkeit zwischen a, b und $R_b$ zu berechnen .

Das Volumen der großen Kugel mit der eingetauchten kleinen Kugel bleibt immer gleich. Hierfür gilt:

$$V_{Ges} = (4/3)\pi R^3 = V_{2,KmK} - V_{1,KK}$$

Durch Einsetzen der obigen Formeln ergibt sich dann

$$(4/3)\pi g r^3 = (1/3)\pi R_b^3 * (2 + 3b - b^3) - (1/3)\pi r^3 * (2 - 3a + a^3)$$

Durch Kürzungen und umformen ergibt sich

$$r^3 * (4g + 2 - 3a + a^3) = R_b^3 * (2 + 3b - b^3)$$

oder

$$(R_b/r)^3 = (4g + 2 - 3a + a^3)/(2 + 3b - b^3)$$

Nach Pythagoras gilt auch

$$r^2 * (1 - a^2) = R_b^2 * (1 - b^2)$$

und weiter

$$(R_b/r)^2 = (1 - a^2)/(1 - b^2)$$

oder auch

$$(R_b/r)^3 = (1 - a^2)^{3/2}/(1 - b^2)^{3/2}$$

Gleichsetzen der beiden Formeln ergibt dann

$$(1 - a^2)^{3/2}/(1 - b^2)^{3/2} = (4g + 2 - 3a + a^3)/(2 + 3b - b^3)$$

Durch Berücksichtigung der dritten binomischen Formel und der beiden Ausdrücke

$$2 - 3a + a^3 = (1 - a)^2 * (2 + a) \quad \text{bzw.} \quad 2 + 3b - b^3 = (1 + b)^2 * (2 - b)$$

ergibt sich dann

$$(1 + a)^{3/2}*(1 – a)^{3/2}/((1 + b)^{3/2}*(1 – b)^{3/2}) = (4g + (1 – a)^2*(2 + a))/( (1 + b)^2*(2 – b))$$

Die Quadratwurzel bekommt man weg, indem man die Gleichung quadriert. Es ergibt sich dann

$$(1 + a)^3*(1 – a)^3/((1 + b)^3*(1 – b)^3) = (4g + (1 – a)^2*(2 + a))^2/( (1 + b)^4*(2 – b)^2)$$

Und durch kürzen von $(1 + b)^3$ im Nenner ergibt sich weiter

$$(1 + a)^3*(1 – a)^3/(1 – b)^3 = (4g + (1 – a)^2*(2 + a))^2/( (1 + b)*(2 – b)^2)$$

Wir machen hier weder die folgende Substitution:

$$s = (1 – a) \quad \text{und} \quad t = (1 – b)$$

Dies setzen wir in die obige Formel ein, und es ergibt sich dann

$$s^3(2 – s)^3/t^3 = (4g + s^2*(3 - s))^2/( (2 - t)*(1 + t)^2)$$

Umgerechnet ergibt sich dann

$$t^3*(4g + s^2*(3 - s))^2 = s^3(2 – s)^3*(2 + 3t – t^3)$$

oder aufgelöst zu einer Gleichung dritten Grades, diesmal mit der Variablen t

$$t^3*((4g + s^2*(3 - s))^2 + s^3(2 – s)^3) - 3t*s^3(2 – s)^3 - 2*s^3(2 – s)^3 = 0$$

oder auch

$$t^3 - 3t*s^3(2 – s)^3/((4g + s^2*(3 - s))^2 + s^3(2 – s)^3) - 2*s^3(2 – s)^3/((4g + s^2*(3 - s))^2 + s^3(2 – s)^3) = 0$$

auch hier macht es Sinn, die folgende Hilfsfunktion einzuführen:

$$k(s) = s^3(2 – s)^3/((4g + s^2*(3 - s))^2 + s^3(2 – s)^3)$$

dann lässt sich die Gleichung einfacher schreiben als

$$t^3 -3k(s)*t – 2k(s) = 0$$

man sieht also, dass sich hier von der Form her genau die gleiche Cardanische Formel $z^3 + pz + q = 0$ wie im 4. Fall ergibt, mit

$$t = z, \quad p = -3k(s), q = -2k(s)$$

Die Lösung für t lautet dann auch hier

$$t = (k(s) + (k^2(s) – k^3(s))^{1/2})^{1/3} + (k(s) - (k^2(s) – k^3(s))^{1/2})^{1/3}$$

Da a und b zwischen 0 und 1 liegen, liegen auch s und t zwischen 0 und 1.

Hier sieht man sofort, dass $k(s) < 1$ ist für s zwischen 0 und 1, da der Nenner immer größer ist als der Zähler

Damit ist dann auch $k^2(s) – k^3(s) = k^2(s)*(1 – k(s)) > 0$ und damit die Quadratwurzel aus

$k^2(s) – k^3(s)$ eine reelle Zahl und damit auch t eine reelle Zahl für s zwischen 0 und 1

Jetzt hat man auch hier alles zusammen, um für die Fläche mit deiner Excel-Lösung das Minimum auszurechnen. Wir ersetzen zunächst in der Flächenformel $a, b, R_b$ durch s,t und r.

$$F_{Ges} = 4\pi r^2 + F_{2,KmK} = 4\pi r^2 + 2\pi {R_b}^2 * (1 + b)$$

Nach der Pythagoras-Formel ist

$${R_b}^2 = r^2 * (1 - a^2)/(1 - b^2)$$

Eingesetzt in die Flächenformel ergibt sich

$$F_{Ges} = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 * (1 - a^2)/(1 - b)$$

Und jetzt noch a,b durch s,t ersetzt

$$F_{Ges} = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 * s(2 - s)/t = 2\pi r^2 * s(2t + 2s - s^2)/t$$

Du wählst hier ein s, berechnest k(s)) und dann t und dann $F_{Ges}$.

Auch hier berechnest du ja eigentlich das Oberflächengewicht und hast deshalb an Stelle von F eine etwas andere Formel. Das ist aber auch hier kein Problem, da die Abhängigkeit zwischen s und t und $R_b$ immer gleich bleibt.