Seminararbeit

Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen mit einem Ökosystem als Anwendungsbeispiel

Fach:	Mathematik Seminarkurs
Name des Fachlehrers:	------------------
Eingereicht von:	Niels Harksen
Klasse:	12
Tutorium:	------------------
Datum der Abgabe:	2.11.2015

Gliederung:

1. Einleitung

Überall dort, wo dynamische Vorgänge beschrieben werden sollen, finden Differentialgleichungen Anwendung. Ihrer Erforschung galt deswegen stets höchste Aufmerksamkeit und begann bereits kurz nach der Entwicklung von Integral- und Differentialrechnung.

Eine naheliegende Anwendung für Differentialgleichungen sind Ökosysteme, deren Bestandteile einem steten Wandel unterliegen und miteinander in Beziehung stehen. Eine mathematische Beschreibung von Ökosystemen ist nicht nur zum besseren Verständnis nötig, sondern bietet weiterhin klare praktische Vorteile. Es ist dadurch möglich, Einflüsse von menschlichen Eingriffen abzuschätzen und dieses Wissen gezielt einzusetzen. Man denke nur an Fangquoten für Fischbestände oder Renaturierungsprojekte, die schon vorher auf Machbarkeit geprüft werden können.

Ziel dieser Arbeit soll es dementsprechend sein, in das Thema Differentialgleichungen einzuführen. Dabei wird der Fokus auf Verständlichkeit gelegt, gegebenenfalls auf Kosten von Prägnanz und technischen Details. Demzufolge wird zunächst die verwendete Symbolik erklärt, anschließend wird die Systematik, das Aufstellen und das Lösen von Differentialgleichungen behandelt. Bei alldem kann wegen des unermesslichen Umfangs des Themas stets nur das Wichtigste erwähnt werden, die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen bieten jedoch die Möglichkeit, sich umfassender zu informieren. Abschließend sollen die im ersten Teil der Arbeit vorgestellten Methoden an einem beispielhaften Ökosystem praktisch angewendet werden, um die beschriebenen Verfahren noch einmal zu verdeutlichen.

2. Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind Gleichungen einer unbekannten Funktion, in der Ableitungen dieser Funktion auftreten. Darüber hinaus können die Funktion selbst, ihr Argument und Konstanten Teil dieser Gleichung sein.

Eine Lösung der Differentialgleichung bildet eine Funktion, die die Gleichung mit ihren Ableitungen erfüllt.[1]

Beispiel:

$f''(x) + f'(x) + f(x) + x + 2 = 0$

$f'(x) = f(x)$

Die zweite Differentialgleichung hat die Lösung

$f(x) = c * e^x$

Überprüft werden kann ein solches Ergebnis, indem es in die Differentialgleichung eingesetzt wird.

$f'(c * e^x) = c * e^x$

was offensichtlich wahr ist.

Das ist zudem ein Beispiel dafür, wie sich von algebraischen Gleichungen vieles auf Differentialgleichungen übertragen lässt, in diesem Fall das Verfahren der Durchführung einer Probe.[2]

Für Differentialgleichungen gibt es mehrere gleichberechtigte Schreibweisen, die hier gemischt verwendet werden, da jede Schreibweise eigene Vorteile hat. Wichtig ist, dass stets Funktion und Argument unterschieden werden können.

Die erste Schreibweise stellt die schon bisher Verwendete dar.

$f''(x) + x = f(x)$

---

[1] Knopp, Konrad; Mangoldt, Hans von: Differentialgleichungen, in: Höhere Mathematik 3, 1957, S.549

[2]Farkas, Walter: Differentialgleichungen, in: Mathematik II Fühjahrssemester 2013, URL: http://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/other/mathematik2_biol/Kapitel10, S. 5 (Stand: 14.8.2015).

Knopp, Konrad; Mangoldt, Differentialgleichungen, in: Höhere Mathematik 3, 1990, S.550

Um den Schreibaufwand zu verringern, wird f(x) auch kurz mit einem Buchstaben, oft y, bezeichnet.

$y'' + x = y$

Die zweite Schreibweise ist eine Variation der ersten, statt $f^k(x)$ wird jedoch $\frac{d^k y}{dx^k}$ geschrieben.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x = y$$

Die dritte Schreibweise wird für allgemeine Zusammenhänge verwendet und fasst die bis zu $k + 2$ Veränderlichen der Differentialgleichung als Funktion zusammen. [3]

$F(x, y', y, \ldots, y^k) = 0$

2.1 Einteilung von Differentialgleichungen

Ähnlich wie algebraische Gleichungen lassen sich auch Differentialgleichungen nach ihrer Struktur in Gruppen einteilen.

Zunächst werden partielle von gewöhnlichen Differentialgleichungen unterschieden. Erstere sind Differentialgleichungen von Funktionen mit mehreren Argumenten, letztere von Funktionen mit einem Argument. In dieser Arbeit wird sich auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränkt.

Die Ordnung einer Differentialgleichung gibt die höchste auftretende Ableitung der Funktion $f(x)$an. [4]

Beispiel:

$f''(x) + x = 0$

Die höchste auftretende Ableitung ist die 2. Ableitung, es handelt sich somit um eine Differentialgleichung 2. Ordnung.

---

[3] Knopp, Konrad; Mangoldt, Hans von: a.a.O., S.549-551
[4] Knopp, Konrad; Mangoldt, Hans von: Differentialgleichungen, in: Höhere Mathematik 3, 1990, S.550

Der Grad einer als Polynom darstellbaren Differentialgleichung ist der höchste Exponent bezogen auf $f(x)$, wobei nicht zwischen der Funktion selbst und ihren Ableitungen unterschieden wird.[5]

Beispiel:

$$\underbrace{f''(x) * f'(x) * f(x)^2}_{4} \quad \underbrace{+f(x)}_{1} \qquad = 0 \qquad \mathit{Grad\ des\ Summanden}$$

Der höchste Grad ist 4, was den Grad der Differentialgleichung bildet.
Falls eine Differentialgleichung höchstens vom Grad 1 ist und $f(x)$ nicht mit nicht linearen Funktionen vorkommt, so wird sie linear genannt.

Beispiel:

$f''(x) + \sin(x) * f'(x) = 0$ ist linear, wogegen

$\sin\left(f''(x)\right) + f'(x) * f(x) = 0$ nur nichtlineare Summanden enthält und deswegen als Ganzes ebenfalls nicht linear ist.[6]

In homogenen Differentialgleichungen kommt außer f(x) keine weitere Störfunktion $g(x)$ vor (beziehungsweise $g(x) = 0$), wobei die Störfunktion sämtliche nicht zu f(x) gehörende Elemente enthält.

Beispiel:

$y' + y = 0$ ist homogen, da die Störfunktion $g(x) = 0$ ist.

$y' + y = 2 * x + 2$ ist jedoch inhomogen, wobei die Störfunktion $g(x) = 2 * x + 2$ ist.[7]

Weiterhin kann zwischen expliziten und impliziten Differentialgleichungen unterschieden werden. Explizit ist die Gleichung, falls die höchste

[5] Blobel; Poelz; Rueter: Kapitel 9: Differentialgleichungen, Mathematische Ergänzungen zur Physik-Formelsammlung, URL: http://www.desy.de/~desch/mathe2/blobelskript/kap09.pdf (Stand: 15.8.2015).

[6] Schneider, Albert: Differentialgleichungen, URL: https://homepages.thm.de/~hg12496/b2/05.01-de-casuistry.pdf (Stand: 19.08.2015)

[7] wie Fußnote 5

Ableitung alleine auf eine Seite gebracht werden kann, in der allgemeinen Schreibweise[8]

$y^k = f(x, y, y', y'', \dots y^{k-1})$

Beispiel:

$y'' = y' + 2y + x$

Andernfalls ist die Gleichung implizit

$F(x, y', y, \dots, y^k)$=0

Beispiel:

$(y'')^5 + (y'')''^4 + (3y'')''^3 + (2y'')''^2 + y'' + \mathrm{y} = 0$

Diese Differentialgleichung ist nicht nach der höchsten Ableitung umstellbar, da Gleichungen 5. Grades nicht mehr durch eine Lösungsformel lösbar sind.[9]

2.2 Aufstellen von Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung soll, sofern sie praktisch angewendet wird, bei der Beschreibung eines Systems helfen. Um eine Gleichung aufstellen zu können, muss zuerst der Aufbau des Systems verstanden und eine Zielgröße festgelegt werden, beispielsweise der zurückgelegte Weg oder die Temperatur zum Zeitpunkt t. Danach wird darauf aufbauend nach durch Gleichungen beschreibbaren Zusammenhängen gesucht.[10]

Ein gutes Beispiel für diese Vorgehensweise bietet der freie Fall im Vakuum. Gesucht ist eine Funktion, die den zurückgelegten Weg s zum Zeitpunkt t angibt.

---

[8] Knopp, Konrad; Mangoldt, Hans von: Differentialgleichungen, in: Höhere Mathematik 3, 1990, S.549

[9] Schülerkollektiv: Die Unlößbarkeit der Gleichung fünften Grades, URL: http://didaktik1.mathematik.hu-berlin.de/files/blossin05_juerg.pdf

[10] Knopp, Konrad; Mangoldt, Hans von: Differentialgleichungen, in: Höhere Mathematik 3, 1990, S.546-548

$s = f(t)$

Bekannt ist, dass die erste Ableitung des zurückgelegten Weges der Geschwindigkeit $v(t)$ entspricht.

$f'(t) = \mathrm{v(t)}$

Weiterhin ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit und somit die zweite Ableitung des Weges die konstante Erdbeschleunigung g.

$f''(t) = \mathrm{v}'(\mathrm{t}) = \mathrm{g}$

Durch Lösung der Differentialgleichung (siehe 2.3) ergibt sich die Funktion

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + ct$$

wobei c für die Anfangsgeschwindigkeit steht. Obwohl diese Funktion ohne Differentialgleichung ebenfalls ohne Schwierigkeiten aufgestellt werden kann, zeigt das Beispiel doch gut die Vorgehensweise.

2.3 Lösen von Differentialgleichungen

Eine Lösung einer Differentialgleichung ist eine Funktion, die im Definitionsbereich die Gleichung mit ihren Ableitungen für alle Argumentwerte erfüllt. Weiterhin handelt es sich um eine allgemeine Lösung, falls die Lösungsfunktion noch weitere Parameter enthält, die unter möglichen Einschränkungen frei gewählt werden können.

Diese Parameter können mithilfe von weiteren Bedingungen an diese bestimmt werden, es wird dann eine sogenannte spezielle Lösung der Differentialgleichung ermittelt.[11]

Da Differentialgleichungen die vielfältigsten Formen annehmen können, gibt es keine allgemeine Lösungsstrategie, die auf jeden Typ angewendet

[11] Autorenkollektiv, Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichungen, in: Mathkit-Projekt, URL: http://www-math.upb.de/~mathkit/Inhalte/DGLen/preview/ (Stand: 19.08.2015)

werden könnte. Weiterhin sind bisher nur für einen Bruchteil der denkbaren Differentialgleichungen analytische Lösungen gefunden worden, sodass oft numerische Methoden zur Anwendung kommen. An dieser Stelle soll sich auf Lösungsmethoden einfacher Fälle beschränkt werden, die jedoch gerade wegen ihrer Einfachheit häufig Verwendung finden. Weiterhin ist es oft nötig, Termumformungsgesetze und Substitutionen geschickt anzuwenden, um die Differentialgleichung in eine lösbare Form zu bringen.[12]

2.3.1 Trennung der Variablen

Liegt eine lineare Differentialgleichung in der Form $y' = y * g(x)$ vor, so kann diese mit dem oben genannten Verfahren gelöst werden, die folgenden Schritte sind in der zweiten Schreibweise angegeben, wodurch die Schritte nachvollziehbarer werden.

$$\frac{dy}{dx} = y * g(x)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = g(x)$$

$$\int \frac{\frac{dy}{dx}}{y} dx = \int \frac{1}{y} dy = \int g(x)\, dx$$

$$ln(y) = \int g(x)\, dx$$

Durch Umstellen nach y ergibt sich die Lösung

$$y = e^{\int g(x) dx}$$

[12] Autorenkollektiv, Einleitung, in: Mathkit-Projekt, URL: http://www-math.upb.de/~mathkit/Inhalte/DGLen/preview/ (31.10.2015)

Diese Lösung wird um einen Faktor C ergänzt

$y = Ce^{\int g(x)dx}$

wobei C durch eine Anfangswertbedingung festgelegt werden kann.[13]

2.3.2 Lösung homogener linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine Differentialgleichung der Form

$a_k y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} +. \ldots + a_0 y = 0$

hat nur konstante Koeffizienten und ist homogen. In diesem Fall werde zunächst die Lösung $y = e^{\lambda x}$ angenommen.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$a_k \lambda^k e^{\lambda x} + a_{k-1} \lambda^{k-1} e^{\lambda x} +. \ldots + a_0 e^{\lambda x} = 0$

Da $e^{\lambda x}$ nie gleich null ist, kann die Gleichung durch den Term geteilt werden und es ergibt sich ein Polynom mit k Lösungen.[14]

$a_k \lambda^k + a_k \lambda^{k-1} +. \ldots + a_0 = 0$

Wir dieses Polynom nach λ aufgelöst, so ergeben sich je nach Ordnung der Differentialgleichung mehrere Lösungen, die in einer sogenannten Fundamentallösung aus linear unabhängigen Summanden zusammengefasst werden. Linear unabhängig bedeutet hier, dass die Summanden keine mögliche Linearkombination der übrigen Summanden sind.

$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$

[13] Schneider, Albert: Einfache Differentialgleichungen erster Ordnung, URL: https://homepages.thm.de/~hg12496/b2/05.03-1st-order.pdf (Stand: 14.09.2015)

[14] Knopp, Konrad; Mangoldt, Hans von: Differentialgleichungen, in: Höhere Mathematik 3, 1957, S.596

Diese Lösung ist gültig, unabhängig davon welche Werte für C_x eingesetzt werden, sie können erneut durch Anfangswertbedingungen ermittelt werden.

In einigen Fällen können als Zwischenlösung für λ imaginäre Werte auftreten, jedoch ergibt sich als letztendliche Lösung ein Term der nur reelle Zahlen und Konstanten enthält. Da $e^{(\mathrm{a+bi})\mathrm{x}} = e^{\mathrm{ax}} * e^{\mathrm{bix}}$ und komplexe Lösungen grundsätzlich konjugiert komplex sind, hat eine komplexe Teillösung der Fundamentallösung stets die Form

$y_K = Ce^{\mathrm{ax}} * e^{\mathrm{bix}} + \bar{C}e^{\mathrm{ax}} * e^{-\mathrm{bix}}$

wobei $\bar{C}$ konjugiert komplex zu der komplexen Zahl $C = m + ri$ ist. Da weiterhin [15]

$e^{\mathrm{ix}} = \cos(x) + i * \sin{(x)}$

kann die Teillösung anders geschrieben werden[16]

$y_K = e^{\mathrm{ax}}(C(\cos(x) + i\sin(bx)) + \bar{C}\,(\cos(x) - i\sin(bx)))$

$y_K = e^{\mathrm{ax}}\big((C + \bar{C}) * \cos(bx) + (C - \bar{C}) * i * \sin(bx))\big)$

$y_K = e^{\mathrm{ax}}\big((m + ri\ + m - ri\ ) * \cos(bx) + (m + ri - m + ri\ ) * i * \sin(bx))\big)$

$y_K = e^{\mathrm{ax}}((2m\cos(bx) + 2r * \sin(bx))$

$y_K = e^{\mathrm{ax}}((U_1\cos(bx) + U_2\sin(bx))$

Der dritte Fall (nach reellen und komplexen Lösungen) sind reelle und komplexe k-fache Nullstellen. In diesem Fall ergibt die mehrfache Lösung genau k Teillösungen nach dem Schema[17]

$x^v *\ e^{\lambda x}; v = 0, \dots, k - 1$

---

[15] Knopp, Konrad; Mangoldt, Hans von: Die Exponentialfunktion, in: Höhere Mathematik 2, 1990, S.559
[16] Knopp, Konrad; Mangoldt, Hans von: Differentialgleichungen, in: Höhere Mathematik 3, 1957, S.597
[17] Griewank, A.: Einfache Differentialgleichungen erster Ordnung, URL: http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~gaggle/W0506/MATHINF/HANDOUT/handout5-4n.pdf (Stand: 23.09.2015)

2.3.3 Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine Differentialgleichung

$a_k y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + .\ldots + a_0 y = g(x)$

ähnelt der in 2.3.2 behandelten Gleichung, ist aufgrund der Störfunktion $g(x) \neq 0$ jedoch inhomogen. Beim Lösen wird zunächst wie unter dem Gliederungspunkt 2.3.2 beschrieben vorgegangen, indem die homogene Gleichung ohne Störfunktion gelöst wird, was eine Fundamentallösung ergibt.

$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung muss aus der Fundamentallösung der homogenen Gleichung (die eingesetzt 0 ergibt) sowie der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung bestehen.

$y_{gesamt} = y_{fumdamental} + y_{speziell}$

Es gibt keinen allgemeinen Lösungsweg für die spezielle Lösung, es ist stets etwas Einfallsreichtum gefragt.

Beispiel:

Die Differentialgleichung

$y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 2x$

hat in ihrer homogenen Form ohne die

Störfunktion $g(x) = 2x$ die Fundamentallösung

$y_{fumdamental} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + \ldots + C_n e^{-2x}$

Die spezielle Lösung muss eingesetzt g(x) ergeben. Es wird angenommen, dass eine lineare Funktion die spezielle Lösung ergibt.

$y_{speziell} = mx + n$

$y_{speziell}{}' = m$

Da das Absolutglied von $g(x)$ gleich 0 ist, müssen sich m und n ausgleichen, sodass die Gleichung

$4m - 12n = 0$ gilt.

Die zweite Gleichung des Gleichungssystems bildet

$-12mx = 2x$

Die Lösungen des Gleichungssystems lauten

$$m = -\frac{1}{6}$$

und

$$n = \frac{1}{18}$$

Die Gesamtlösung lautet somit

$$y_{gesamt} = C_1 e^{3\mathrm{x}} + C_2 e^{2\mathrm{x}} + \ldots + C_n e^{-2\mathrm{x}} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{18}$$

Für Störpolynome höheren Grades wird analog vorgegangen, die spezielle Lösung wird als Polynom desselben Grades angenommen und dann ein Gleichungssystem erstellt.

Für $gx) = e^{bx}$ kann eine spezielle Lösung der Form $y_{speziell} = me^{bx}$ angenommen werden, was eingesetzt und abgeleitet ebenfalls ein lösbares Gleichungssystem ergibt.

$g(x) = \sin(bx)$ beziehungsweise $gx) = \cos(bx)$ führt zu der Lösungsannahme

$$y_{speziell} = m_1 \sin(bx) + m_2 \cos(bx)$$

die erneut ein Gleichungssystem ergibt. Diese Vermutung ist dahingehend sinnvoll, dass Sinus- und Cosinusfunktion über ihre Ableitungen und den Zusammenhang $e^{\mathrm{ix}} = \cos(x) + i * \sin(x)$ (siehe 2.3.2) verbunden sind.[18]

[18] Farkas, Walther: Mathematik Frühjahrssemester, URL: https://www2.math.ethz.ch /education/bachelor/lectures/fs2013/other/mathematik2_biol/Kapitel10 (Stand: 23.09.2015)

2.3.4 Allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Eine Differentialgleichung der Form

$y' + \mathrm{a(x)y} = \mathrm{b(x)}$

lässt sich lösen, indem zuerst die Differentialgleichung für $b(x) = 0$ durch Trennung der Variablen (siehe 2.3.1) gelöst wird. Es ergibt sich die allgemeine Lösung

$y_{allgemein} = Ce^{\int a(x)dx}$

Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung werde nun angenommen, dass C anstatt einer Konstante eine Funktion $C(x)$ ist. Unter dieser Annahme wird die allgemeine Lösung in die Differentialgleichung eingesetzt. [19]

$C'(x)e^{\int -a(x)dx} - C(x)a(x)e^{\int -a(x)dx} + C(x)\mathrm{a(x)y} = \mathrm{b(x)}$

was zusammengefasst

$C'(x)e^{\int -a(x)dx} = \mathrm{b(x)}$

ergibt.

C(x) ist somit

$$C(x) = \int \frac{\mathrm{b(x)}}{e^{\int -a(x)dx}}$$

Beispiel:

$y' + 2\mathrm{xy} = 2\mathrm{x}$

$y_{allgemein} = Ce^{-x^2}$

$y_{speziell} = C(x)e^{-x^2}$

[19] Knopp, Konrad; Mangoldt, Hans von: Differentialgleichungen, in: Höhere Mathematik 3, 1957, S.571

$$-2xC(x)e^{-x^2} + C(x)'e^{-x^2} + 2\mathrm{x}C(x)e^{-x^2} = 2x$$

$$C(x) = \int \frac{2\mathrm{x}}{e^{-x^2}} = e^{(x^2)}$$

$$y_{gesamt} = C_{allgmein}e^{-x^2} + e^{(x^2)} * e^{-x^2} = C_{allgmein}e^{-x^2} + 1$$

2.3.5 Richtungsfeld

Eine explizite Differentialgleichung erster Ordnung

$y' = f(y,x)$

lässt sich graphisch veranschaulichen, indem in einem xy-Koordinatensystem jedem Punkt ein Vektor zugeordnet wird, der genau den Anstieg $y' = f(y,x)$ abbildet, es entsteht dabei ein sogenanntes Richtungsfeld. Die Vektoren des Richtungsfeldes können auch als Tangenten der Lösungsfunktion am jeweiligen Punkt angesehen werden. Nimmt man nun den Endpunkt eines Vektors stets als den Ausgangspunkt des nächsten an und lässt die Länge der Vektoren gegen 0 streben, so schmiegt sich die Kette von Vektoren an den Graph einer Lösungsfunktion an. Das Richtungsfeld zeigt damit den Verlauf möglicher Lösungsfunktionen als Kurvenschar an und kann dadurch helfen, einen Lösungsansatz zu finden. Dargestellt ist ein Richtungsfeld für die explizite Differentialgleichung $y' = y$, es ist bereits bekannt, dass diese Differentialgleichung eine Exponentialfunktion als Lösung hat. Diese Lösung wird durch das Richtungsfeld bestätigt, welches eine Kurvenschar von Exponentialfunktionen abbildet. [20]

---

[20] Knopp, Konrad; Mangoldt, Hans von: Differentialgleichungen, in: Höhere Mathematik 3, 1957, S.553

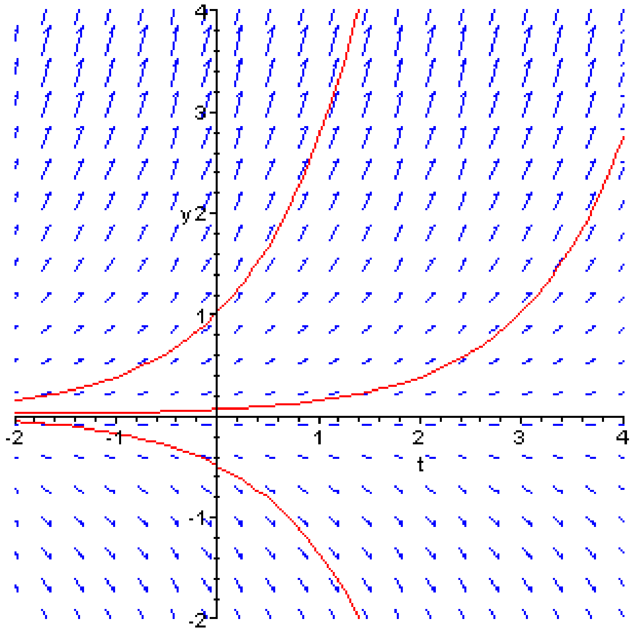

Abbildung 1: Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = y$

3. Modellierung von Ökosystemen

Ökosysteme sind ein System von Faktoren der belebten und unbelebten Umwelt, die sich untereinander beeinflussen. Differentialgleichungen bieten die Möglichkeit, Ökosysteme quantitativ zu beschreiben, indem die Teilfaktoren in Beziehung zueinander gesetzt werden. Dadurch lassen sich Entwicklungen in Ökosystemen besser verstehen, Auswirkungen von einzelnen Faktoren ermitteln oder auch Vorhersagen über die zukünftige Entwicklung treffen, wodurch Differentialgleichungen zu einem unverzichtbaren Mittel der Ökologie werden.

Wie in 2.2 beschrieben, geht jeder Differentialgleichung eine Untersuchung des Ökosystems voraus, um die Zusammenhänge zu verstehen, darauf aufbauend werden die Faktoren durch Differentialgleichungen verknüpft. In der Realität treten dabei nicht analytisch lösbare Differentialgleichungssysteme auf, die jedoch nicht minder nützlich sind, da auf ihrer Basis numerische Lösungsverfahren angewendet oder Computersimulationen erstellt werden können. Das Beispielökosystem dagegen wurde bewusst einfach gehalten, da es an dieser Stelle einzig um das Prinzip geht.[21]

3.1 Annahmen

Gegeben sei ein Ökosystem aus zwei Tierarten, wobei die erste Tierart von der Zweiten, die Zweite jedoch nicht von der Ersten abhängig ist. Ein Beispiel für eine solche Abhängigkeit sind Elefanten und Mistkäfer. Beobachtungen der Elefantenpopulation zeigen, dass diese nach einer Katastrophe (Dürre, Krankheit) periodisch um einen Mittelwert pendelt, wobei die Ausschläge immer kleiner werden. Sie lässt näherungsweise mit der Funktion

$$E(t) = E_0 + C_E * \sin(bt)$$

beschreiben.

Angenommen die Mistkäfer sind in der Lage, aufgrund ihrer hohen Vermehrungsrate sämtlichen Elefantendung zu verwerten, so kann ein Elefant pro Zeiteinheit einer bestimmten Anzahl an Mistkäfern die Vermehrung ermöglichen. Gleichzeitig stirbt pro Zeiteinheit ein bestimmter Anteil an Mistkäfern.

Koeffizienten:

G_M	Geburtenrate Mistkäfer pro Elefant
T_M	Todesrate Mistkäfer pro Zeiteinheit
E_0	Anfangsanzahl Elefanten
b	$\frac{1}{b} * 2\pi$ ist die Länge der Elefantenpopulationsperiode
C_E	Parameter, der den Einfluss der Sinusfunktion auf die Elefantenpopulation festlegt
T_M	Todesrate Mistkäfer pro Zeiteinheit

Sämtliche Koeffizienten sind positive reelle Zahlen.

[21] Vortrag „Differentialgeichungen in der Ökologie" am „Tag der Wissenschaften" 2013

3.2 Aufstellen und Lösen der Differentialgleichung

Die getroffenen Annahmen führen zu der inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung

$m(t)' = E(t) * G_M - T_M * m(t)$

Wie in 2.3.3 erklärt, wird zunächst die homogene Differentialgleichung gelöst.

$m(t)' + T_M * m(t) = 0$

$\lambda = -T_M$

$m(t)_{homogen} = C_1 * e^{-T_M t}$

Es folgt die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$m(t)' = G_M(E_0 + C_E e^{-at} * \sin(bt)) - T_M * m(t)$

$m(t)' = G_M E_0 + C_E G_M e^{-at} * \sin(bt) - \ T_M * m(t)$

Zielführend ist der Lösungsansatz

$m(t)_{speziell} = m_0 + r_1 \sin(bt) + r_2 \cos(bt)$

$m'(t)_{speziell} = r_1 b \cos(bt) - r_2 b \sin(bt)$

Eingesetzt in die ursprüngliche Differentialgleichung ergibt sich

$$r_1 b \cos(bt) - r_2 b \sin(bt) = G_M E_0 + G_M C_E * \sin(bt) - T_M m_0 \\ - T_M r_1 \sin(bt) - T_M r_2 \cos(bt)$$

$\cos(bt) * (r_1 b + r_2) = 0$

Ermittlung der Parameter r_1, r_2 und m_0:

$r_1 b + r_2 = 0 \rightarrow r_2 = -r_1 b$

$\sin(bt) * (T_M r_1 - r_2 b) = G_M C_E * \sin\,(bt)$

$T_M r_1 - r_2 b = G_M C_E$

$$r_1 = \frac{G_M C_E + r_2 b}{T_M}$$

$$r_2 = -\frac{G_M C_E + r_2 b}{T_M} b$$

$$r_2 = \frac{-G_M C_E b}{T_M + b^2}$$

Weiterhin muss gelten

$$G_M E_0 = T_M m_0 \rightarrow m_0 = \frac{G_M E_0}{T_M}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$m(t)_{speziell} = C_1 * e^{-T_M t} + m_0 + r_1 \sin(bt) + r_2 \cos(bt)$$

Die tatsächliche Anfangspopulation der Mistkäfer $m_{tatsächlich}$ an t_0 ist die Summe

$$m_{tatsächlich} = m_0 + C_1$$

Die Population der Mistkäfer oszilliert nach längerer Zeit um m_0. Die Exponentialfunktion beschreibt die Annäherung des Anfangsbestandes (der, je nach Parameter C_1 größer oder kleiner als m_0 sein kann) an m_0.

Beispiel:

Angenommen werden folgende Parameter:

Parameter	Wert
E_0	10 Elefanten
C_E	1
b	0,5
G_M	10
T_M	0,9
C_1	0

Über die angegebenen Beziehungen können die Koeffizienten der speziellen Lösungsfunktion ermittelt werden.

Koeffizient	Wert
r_1	$\approx 8{,}7$
r_2	$\approx -4{,}35$
m_0	$\frac{1000}{9}$

Auf eine Manipulation des tatsächlichen Anfangsbestandes durch den Parameter C_1 wird verzichtet, nicht zuletzt weil der Einfluss der Exponentialfunktion auf den Gesamtbestand mit fortschreitender Zeit immer kleiner wird (aufgrund des negativen Exponenten).

$$m(t)_{beispiel} = \frac{1000}{9} + 8{,}7 * \sin(bt) - 4{,}35\cos(bt)$$

„Halbe“ Mistkäfer sind nicht sinnvoll, soll also die Population zu einem bestimmten Zeitpunkt errechnet werden, so ist Runden nötig. Dieser auftretende Fehler zeigt sehr gut, dass die Genauigkeit eines solchen Modells steigt, je größer die Anzahl der betrachteten Individuen ist, da kleine Abweichungen weniger ins Gewicht fallen.

Abschließend eine Darstellung der Elefantenfunktion und der Mistkäferpopulation mit Periodenparameter $b = 0{,}5$.

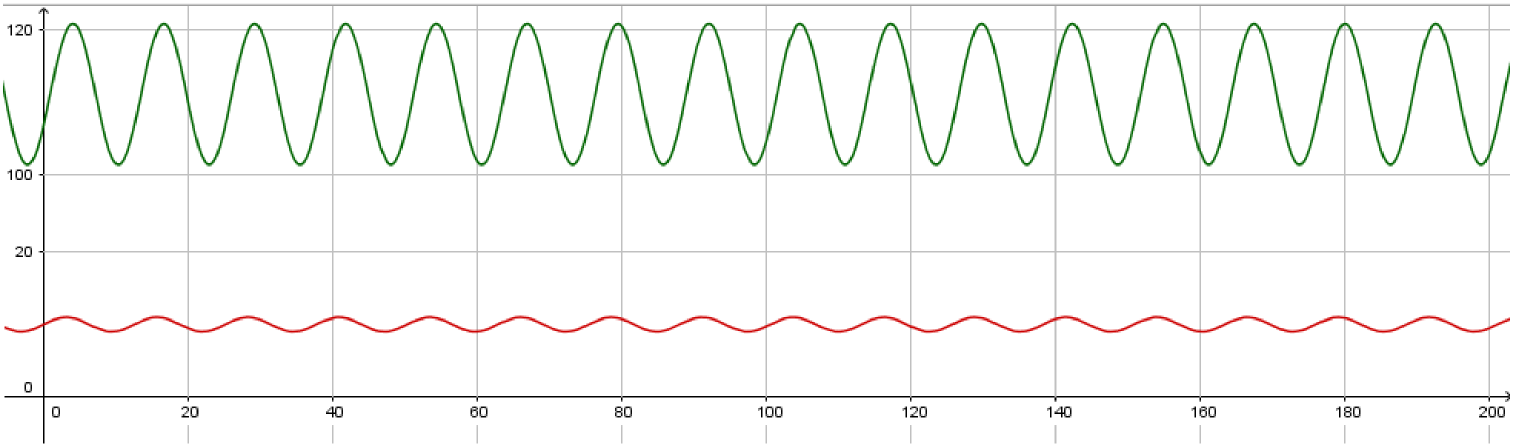

Abbildung 2: Käferfunktion (grün) und Elefantenfunktion (rot), Zeit an x-Achse mit frei zu wählender Einheit, Population an y-Achse, Grafik erstellt mit GeoGebra

Dieses Diagramm zeigt, dass die Mistkäferpopulation in ihrer Oszillation gegenüber Elefantenpopulation verschoben ist, der Bestand an Käfern also etwas verzögert auf mehr oder weniger Gelegenheiten zur Fortpflanzung reagiert. Auf Basis des erstellten Modells können weitere Untersuchungen durchgeführt werden, etwa wie sich Veränderungen einiger Parameter auf die Bestandsentwicklung auswirken.

4. Zusammenfassung

Jede Arbeit über Differentialgleichungen kann nur einen kleinen Teilausschnitt dieses so umfangreichen Themas vorstellen. In der Einleitung wurde bereits ausgeführt, warum die Arbeit in dieser Form aufgebaut wurde, warum auf einige Formalien zu Gunsten der Verständlichkeit verzichtet und warum die Wirkung dieses mathematischen Werkzeuges gerade an Ökosystemen verdeutlicht wurde. Wer nun mit Hilfe dieser Arbeit die Differentialgleichungen in ihrer Symbolik besser versteht, sie einzuteilen vermag und auch selbst in der Lage ist, diese für ein bestimmtes Problem aufzustellen, wird womöglich von dem Abschnitt „Lösen von Differentialgleichungen“ etwas enttäuscht sein, denn aus Platzgründen musste sich auf lineare Differentialgleichungen in verschiedenen Variationen beschränkt werden, obwohl es doch so viele denkbare Typen von Gleichungen gibt. Dennoch ist gerade diese einfachste Gruppe von Differentialgleichungen diejenige, die wohl am häufigsten auftritt und deswegen in einer Einführung die meiste Aufmerksamkeit verdient und meiner Ansicht nach ausreichend ist.

Abschließend soll noch auf einen besonderen Vorteil von Differentialgleichungen hingewiesen werden, der zu ihrer Faszination sehr viel beiträgt: Es ist mithilfe von Differentialgleichungen möglich, eine mathematische Beschreibung in Form einer Funktion für

Problemstellungen zu finden, die auf den ersten Blick schwer zu erfassen sind. Indem ein Problem in eine Differentialgleichung zerlegt wird, ist es nicht mehr nötig, eine Formel einzeln Schritt für Schritt herzuleiten, stattdessen übergibt man das Herleiten an ein zuvor entwickeltes Lösungsverfahren und erhält am Ende eine Lösungsfunktion, die man in dieser Form oft nicht erwartet hätte. Dadurch werden Differentialgleichungen zu einem sehr mächtigen Instrument in den vielfältigsten Bereichen.

5. Quellenverzeichnis

Textquellen:

1. Knopp, Konrad; Mangoldt, Hans von: Differentialgleichungen, in: Höhere Mathematik 3, 1957, S. 549, 553, 571, 596-597

2. Knopp, Konrad; Mangoldt, Hans von: Differentialgleichungen, in: Höhere Mathematik 3, 1990, S. 546-548, 549-551, 559, 571, 596-597

3. Farkas, Walter: Differentialgleichungen, in: Mathematik II Fühjahrssemester 2013, URL: http://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/other/mathematik2_biol/Kapitel10, S. 5 (Stand: 14.8.2015).

4. Blobel; Poelz; Rueter: Kapitel 9: Differentialgleichungen, Mathematische Ergänzungen zur Physik-Formelsammlung, URL: http://www.desy.de/~desch/mathe2/blobelskript/kap09.pdf (Stand: 15.8.2015).

5. Schneider, Albert: Differentialgleichungen, URL: https://homepages.thm.de/~hg12496/b2/05.01-de-casuistry.pdf (Stand: 19.08.2015)

6. Schülerkollektiv: Die Unlößbarkeit der Gleichung fünften Grades, URL: http://didaktik1.mathematik.hu-berlin.de/files/blossin05_juerg.pdf (Stand: 5.10.2015)

7. Autorenkollektiv, Mathkit-Projekt, URL: http://www-math.upb.de/~mathkit/Inhalte/DGLen/preview/ (31.10.2015
8. Griewank, A.: Einfache Differentialgleichungen erster Ordnung, URL: http://www2.mathematik.hu- berlin.de/~gaggle/W0506/ MATHINF/HANDOUT/handout5-4n.pdf (Stand: 23.09.2015)

9. Vortrag „Differentialgeichungen in der Ökologie“ am „Tag der Wissenschaften“ 2013

Bildquellen:

Abbildung 1:
Naujok, Marc-Douglas; Nowotny, Michael: Euler Verfahren, URL: http://www.numerik.mathematik.uni-mainz.de/didaktikseminar/Gruppe8/C4.htm (Stand: 31.10.2015)

Abbildung 2: Eigenanfertigung mit GeoGebra